Vincent Nolot	**Exemples d'utilisation de la loi Binomiale**	Dijon
Leçons : **2-3-4-7**		

Enoncé : Surbooking. On se sert de la statistique suivante : 20% des personnes qui ont réservé une place pour un vol ne viennent pas. Pour ne pas perdre trop d'argent, certaines compagnies aériennes ont donc mis en place le surbooking, qui consiste à vendre plus de billets qu'il n'y a de places dans l'avion.

a. Une compagnie accepte 120 réservations. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 90 personnes présentes ?

b. Sur un vol de 100 place, combien peut-on accepter de réservations si on veut être sûr à 90% qu'il n'y ait pas de clients insatisfaits ?

En préambule on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la personne i se présente au vol, et 0 sinon. On note n le nombre de réservations pour le vol en question. Le nombre de personnes présentes est donc exactement $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a. Dans cette question $n = 120$. On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(S_{120} \geq 90)$. Ce qui fait une somme de 41 termes à calculer ! Pour surmonter cette lourde tâche on peut utiliser le théorème central limite : S_{120} suit *approximativement* une loi normale de même moyenne et de même écart-type. Or $\mathbb{E}[S_{120}] = 120 \times 0.8 = 96$ et $\mathbb{V}[S_{120}] = 120 \times 0.8 \times 0.2 = 19.2$. Ainsi $S_{120} \sim \mathcal{N}(108, \sqrt{19.2})$ et donc on sait calculer la probabilité en se ramenant à une loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{120} \geq 90) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{120}-96}{\sqrt{19.2}} \geq \frac{90-96}{\sqrt{19.2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_{120}-96}{\sqrt{19.2}} \leq 1.36\right) \qquad \text{par symetrie} \\
&\approx 0.915 \qquad \text{par la table de la loi normale}
\end{aligned}$$

Il y a donc environ $91,5\%$ de chance que plus de 90 personnes se présentent à ce vol.

b. Dans cette question on cherche le nombre de réservations, c'est-à-dire n. On cherche n tel que $\mathbb{P}(S_n \leq 100) = 0.9$. Cela se traduit sous la forme

$$\sum_{k=1}^{100} \binom{n}{k} (0.8)^k (0.2)^{n-k} = 0.9$$

et cette équation est particulièrement difficile à résoudre ! Là encore il s'agit de revenir à la loi normale. On a $S_n \sim \mathcal{N}(0.8n, \sqrt{0.16n})$. On cherche donc n tel que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq 100) &= 0.9 \\
\mathbb{P}\left(\frac{S_n - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} \geq \frac{100-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right) &= 0.9
\end{aligned}$$

De la table on tire $\frac{100-0.8n}{\sqrt{0.16n}} = -1,282$ soit encore $100 - 0.8n = -1,282\sqrt{0.16n}$. Pour résoudre cette équation on peut poser $X = \sqrt{n}$ et ainsi se ramener à une équation du second degré en X. On revient aux n en prenant les carrés des solutions trouvées, sans oublier d'arrondir (n doit être entier !).

Enoncé : Une société d'assurance A doit assurer 100 véhicules identiques de valeur 10 000 euros. Sur un an, la probabilité pour qu'un véhicule soit accidenté et irréparable est de $p = 0,01$. Les accidents sont supposés indépendants. On suppose que A doit payer le 31 décembre tous les sinistres de l'année (remboursement intégral des voitures accidentées).

a. A combien doit s'élever la réserve financière de la société d'assurance A pour qu'elle puisse indemniser tous les sinistres dans 99% des cas ? (Utiliser la table de la loi normale)

b. Une autre société d'assurance B effectue le même travail que A mais pour 100 autres véhicules. La fusion des entreprises A et B est-elle intéressante financièrement ? Pour voir cela, calculer la réserve financière dont les deux sociétées fusionnées auraient besoin pour 200 véhicules.